

מכניקה קוונטית של אטומים

פרק 7 - אופרטור העלאה והורדה (סולם) באוסילטור הרמוני

תוכן העניינים

1. הרצאות ותרגילים.....1

אופרטור העלאה והורדה באוסילטור הרמוני:

סיכום כללי:

אופרטור ההורדה (או השמדה):

$$\hat{a} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$

אופרטור ההעלאה (או יצירה):

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{a} \hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \right)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$\hat{a} |\psi_n\rangle = \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger |\psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\psi_{n+1}\rangle$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n \psi_0$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} H_n \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} x \right]$$

$$H_0(y) = 1$$

$$H_1(y) = 2y$$

$$H_2(y) = -2(1 - 2y^2)$$

$$H_3(y) = -12 \left(y - \frac{2}{3} y^3 \right)$$

שאלות:

(1) יחס החילוף של a עם H

מצאו את:

א. $[\hat{a}, \hat{H}]$

ב. $[\hat{a}^\dagger, \hat{H}]$

(2) חישוב עם האופרטורים

נתון אוסילטור הרמוני עם תדירות ω .א. הראו באופן מפורש את פעולת האופרטור $\hat{a}$ על המצבים ϕ_0 ו- ϕ_1 כאשר ϕ_n הם המצבים העצמיים של ההמילטוניאן).

מכילים חלקיק במצב: $|\psi\rangle = A[|\phi_1\rangle + \sqrt{2}|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle]$

ב. מצאו את הקבוע A .ג. מהי התוחלת והשונות של האנרגיה ב- $t=0$?

ד. מהי פונקציית הגל כתלות בזמן?

ה. מהו ערך התוחלת של המיקום כתלות בזמן?

תשובות סופיות:

(1) א. $\hbar\omega\hat{a}$ ב. $-\hbar\omega\hat{a}^\dagger$

(2) א. הוכחה. ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\Delta E = \frac{1}{\sqrt{2}}\hbar\omega$ ד. $\langle E \rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega$

ד. $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left[e^{-i\frac{3}{2}\omega t} |\phi_1\rangle + \sqrt{2} e^{-i\frac{5}{2}\omega t} |\phi_2\rangle + e^{-i\frac{7}{2}\omega t} |\phi_3\rangle \right]$

ה. $\langle x(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right) [2 + \sqrt{6}] \cos\left(\frac{1}{2}\omega t\right)$